கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர)ப் 2023

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය - මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம் - 10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time - 10 minutes

வினாத்தாளை வாசித்து, வினாக்களைத் தெரிவுசெய்வதற்கும் விடை எழுதும்போது முன்னுரிமை வழங்கும் வினாக்களை ஒழுங்கமைத்துக் கொள்வதற்கும் மேலதிக வாசிப்பு நேரத்தைப் பயன்படுத்துக.

சுட்டெண்							

அறிவுறுத்தல்கள் :

- இவ்வினாத்தாள் **பகுதி A** (வினாக்கள் **1 – 10**), **பகுதி B** (வினாக்கள் **11 – 17**) என்னும் இரு பகுதிகளைக் கொண்டது.
- **பகுதி A :**
  எல்லா வினாக்களுக்கும் விடை எழுதுக. ஒவ்வொரு வினாவுக்குமுரிய உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள இடத்தில் எழுதுக. மேலதிக இடம் தேவைப்படுமெனின், நீர் மேலதிக தாள்களைப் பயன்படுத்தலாம்.
- **பகுதி B**
  ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக. உமது விடைகளைத் தரப்பட்டுள்ள தாள்களில் எழுதுக.
- ஒதுக்கப்பட்டுள்ள நேரம் முடிவடைந்ததும் **பகுதி A** இன் விடைத்தாளானது **பகுதி B** இன் விடைத்தாள்களுக்கு மேலே இருக்கத்தக்கதாக, இரு பகுதிகளையும் இணைத்துப் பரீட்சை மண்டப மேற்பார்வையாளரிடம் கையளிக்க.
- வினாத்தாளின் **பகுதி B ஐ மாத்திரம்** பரீட்சை மண்டபத்திலிருந்து வெளியே எடுத்துச் செல்வதற்கு அனுமதிக்கப்படும்.

பரீட்சகர்களின் உபயோகத்திற்கு மாத்திரம்

(10) இணைந்த கணிதம் I		
பகுதி	வினா எண்	புள்ளிகள்
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	மொத்தம்	

மொத்தம்

இலக்கத்தில்	
எழுத்தில்	

குறியீட்டெண்கள்

விடைத்தாள் பரீட்சகர்	
பரிசீலித்தவர் : 1	
பரிசீலித்தவர் : 2	
மேற்பார்வை செய்தவர்	

01. கணிதத் தொகுத்தறிவுக் கோட்பாட்டைப் பயன்படுத்தி, எல்லா $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^{+}$ இற்கும் $\sum_{r=1}^{n} \mathbf{2}^{r} = \mathbf{2}(\mathbf{2}^{n} - \mathbf{1})$ என நிறுவுக.

02. $y = \big||x-2| - 2\big|$ இன் வரைபை பரும்படியாக வரைக இதிலிருந்து அல்லது வேறுவிதமாக $\big||x-2| - 2\big| = \frac{x}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

03.ஆகண் வரிப்படத்தில், சமனிலி $|z-2-2i| \leq 1, Arg(z-4i)$ ஐத் திருப்தியாக்கும் சிக்கலெண் z ஐ வகைக்குறிக்கும் புள்ளிகளைக் கொண்ட பிரதேசம் R இனை நிழற்றுக. நிழற்றப்பட்ட பிரதேசத்தில் உள்ள புள்ளிகளினால் வகைக்குறிக்கப்படும் சிக்கலெண்கள் Z இற்கு $Im(z)$ இன் மிகச் சிறிய பெறுமானத்தைக் காண்க.

04. $\boldsymbol{n \epsilon \mathbb{Z}^+}$ இற்கு $(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ இனது ஈருறுப்பு விரிவை x இன் வலு அதிகரிக்கும் ஒழுங்கில் எழுதுக.

$\left(\mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{7}}$ இன் விரியில் உள்ள x^2 இன் குணகம் 14 எனின் $\boldsymbol{a}=-\mathbf{1}$ எனக்காட்டுக.

05. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{x}-\sqrt{\pi}}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ எனக் காட்டுக.

06. $\mathbf{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}+\mathbf{1})\,\mathbf{tan^{-1}}\sqrt{\boldsymbol{x}} - \sqrt{\boldsymbol{x}}$ எனின் $\frac{df(x)}{dx}$ இணைக் காண்க. இதிலிருந்து இனைப் பெறுக. $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}, \boldsymbol{y} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} = \sqrt{\mathbf{tan^{-1}}\sqrt{\boldsymbol{x}}}$ ஆகிய வளையிகளினால் உள்ளடைக்கப்படும் பிரதேசம் x அச்சைப்பற்றி $\mathbf{2}\boldsymbol{\pi}$ ஆரையன்களினூடு சுழற்றப்படுவதால் பிறப்பிக்கப்படும் திண்மத்தின் கனவளவு $\frac{\pi}{3}\left(\mathbf{4}\boldsymbol{\pi} - \mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}\right)$ எனக்காட்டுக.

07. $0 \leq \theta \leq \pi$ இற்கு θ பரமானமாக இருக்க $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$ என்பவற்றின் மூலம் C எனும் ஓர் வளையி பரமானமாக தரப்பட்டுள்ளது. $\theta = \alpha$ ஆகுமாறுள்ள புள்ளி P இல் வளையி C இற்கு வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாடு $(a\sec\alpha)x - (b\,\mathrm{cosec}\,\alpha)y + b^2 - a^2 = 0$ இனால் தரப்படும் எனக்காட்டுக. C இன் மீதுள்ள $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ புள்ளியில் வரையப்பட்ட செவ்வனின் சமன்பாட்டைப் பெறுக.

08. $4x + 3y - k = 0$, $5x - 12y + 7 = 0$ ஆகிய கோடுகள் இடைவெட்டும் புள்ளியினூடு செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $l: y - mx = 0$ எனின் m இன் பெறுமானத்தை k சார்பில் காண்க. மேலும் $l = 0$ என்ற கோடு, $x + y = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்து எனத் தரப்படின், m , k இன் பெறுமானங்களைக் காண்க.

09. $x^2 + y^2 = 9$ என்ற வட்டத்தை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டுவதும் y- அச்சின் மீது மையத்தை கொண்டதுமான வட்டம் $S = 0$ இன் பரிதியை $x^2 + y^2 + x - 7y + 5 = 0$ என்ற வட்டமானது இருசமகூறிடுகிறது எனின் $S = 0$ இற்கு சாத்தியமான இரு வட்டங்கள் உண்டெனக் காட்டி, அவ்வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை எழுதுக.

10 $\tan A = \frac{5}{12}, \sin B = \frac{4}{5}$ என்க. இங்கு $\pi < A < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ ஆகும். எனின் $\sin(A + B)$ இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர்தர)ப் பரீட்சை -

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 T I

பகுதி B

❖ **ஐந்து வினாக்களுக்கு மாத்திரம் விடை எழுதுக.**

11 (a) $a,b,c \in \mathbb{R}$,இற்கு இருபடிச்சமன்பாடு $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$ இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை மற்றும் பெருக்குத்தொகையினை a,b,c சார்பில் காண்க.

$f(x) = x^2 - p^2qx + q^2$; $p,q \in \mathbb{R}^+$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. $f(x) = 0$ இன் மூலங்கள் α, β எனின்

(i) $\alpha^{3/2} + \beta^{3/2}$ இன் பெறுமானத்தை p,q சார்பில் காண்க.

(ii) α, β என்பன மெய்யாவதற்கு p இன் மிகச்சிறிய நிறையெண் பெறுமானத்தைக் காண்க.

(iii) P இன் அவ் நிறையெண் பெறுமானத்துக்கு $\alpha^{3/2}, \beta^{3/2}$ என்பவற்றை மூலங்களாகவுடைய இருபடிச்சமன்பாட்டை q சார்பில் எழுதுக.

(b) $\lambda \epsilon \mathbb{R}^+$ ஆகுமாறு $P(x) \equiv 2x^3 + x^2 - 2x + \lambda$ ஆகுமாறான பல்லுறுப்பி $P(x)$ என்க.

(i)λஎன்பது பல்லுறுப்பி $P(x)$இன்ஒரு பூச்சியம் எனின் λ எடுக்கக் கூடிய பெறுமானங்களைக் காண்க.

(ii)$-\lambda$என்பது $P(x)$பல்லுறுப்பியின் ஒரு பூச்சியம் எனின் λ எடுக்கக்கூடியபெறுமானங்களைக்காண்க.

(iii)மேலே (i), (ii) ஆகிய இரண்டு வகைகளையும் திருப்திப்படுத்தும் λ இன் பெறுமானத்துக்கு ஒத்த $P(x)$ பல்லுறுப்பியை எழுதி $P(x)$ இனை ஏகபரிமாணக்காரணிகளின் பெருக்கமாக எடுத்துரைக்க.

(iv) $P(x) + 3x + 2$ என்ற பல்லுறுப்பியை $x^2 + 1$ ஆல் வகுக்கும் போது மீதியைக் காண்க.

12 (a) நிறுவனமொன்றின் வாகன தரிப்பிடத்தில் ஒரு நிரையில் நான்கு கார்கள் வீதம் இரண்டு நிரைகளில் எட்டு கார்கள் தரித்துநிற்க முடியும்.

(i) நிறுவனத்தின் 8 கார்களையும் தரித்துநிறுத்தக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையை காண்க.

(ii) முதல் நிரையில் முதல் இடம் நிறுவனத் தலைவருக்கும், முதல் நிரையில் யாதாயினும் ஒரு இடம் செயலாளருக்கும் வழங்கப்பட வேண்டும். எனின் 8 வாகனங்களை நிறுத்தக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii)முதல் நிரையின் முதல் இடத்தை தலைவர் அல்லது செயலாளர் இருவரில் ஒருவருக்கு ஒதுக்குவதோடு மற்றவரின் வாகனத்தை முதல் நிரையிலேயே நிறுத்த வேண்டியிருப்பின் கார்களை நிறுத்தக் கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(b) $r \epsilon \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\frac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)} = \frac{Ar+B}{r^2-r+1} - \frac{Ar+2B}{r^2+r+1}$ ஆகுமாறு மெய்மாறிலிகள் A,B ஆகியவற்றின் பெறுமானங்களைக்காண்க. $U_r = \frac{r^2+3r-1}{(r^2-r+1)(r^2+r+1)}$ எனின் $U_r = f_{(r)} - f_{(r+1)}$ ஆகுமாறு $f_{(r)}$ ஐ வரையறுக்க இதிலிருந்து $n \in \mathbb{Z}^+$ இற்கு $\sum_{r=1}^{n} U_r = 2 - \frac{(n+2)}{n^2+n+1}$ எனக் காட்டுக.

இத் தொடர் ஒருங்குமா? காரணம் தருக

$\sum_{r=1}^{n} U_r < 2 - \frac{11}{91}$ எனின் n எடுக்கக் கூடிய உயர் பெறுமானத்தைக் காண்க.

13 (a). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ஆகவிருக்க A உடன் பெருக்கலின் கீழ் பரிவர்த்தனையான B எனும் தாயத்தை $\lambda A + \mu I$ வடிவில் எடுத்துரைக்க முடியுமெனக் காட்டுக. இங்கு λ, μ என்பன மெய் ஒருமைகள், Iஎன்பது வரிசை இரண்டிலான அலகுத் தாயமாகும். $B = A^2$ ஆகுமாறு λ, μ இன் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து A^{-1} ஐக் காண்க.

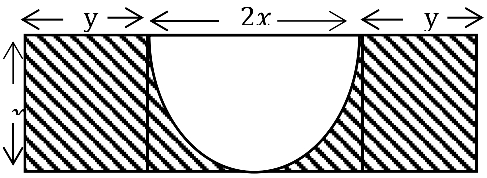
(b). $Z^6 - 1$ ஐ முற்றாக காரணிப்படுத்துவதன் மூலம் $Z^6 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் எல்லா மூலங்களையும் காண்க. Z_1, Z_2 என்பன $Z^6 = 1$ எனும் சமன்பாட்டின் யாதாயினும் இரு வேறுவேறான முலங்கள் எனின்,ஆகண் வரிப்படத்தைப் பயன்படுத்தி அல்லது வேறுவிதமாக $|Z_1 - Z_2|$ இனது பெறுமானங்கள் 1, 2, $\sqrt{3}$ எனக்காட்டுக.

(c).தமோய்வரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி நேர் நிறைவெண் n இற்கு

$\left(\frac{1+\sin\theta+i\cos\theta}{1+\sin\theta-i\cos\theta}\right)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ எனக் காட்டுக.

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} = (-1)^n$ என்பதை உய்த்தறிக.

14 (a) $x \neq -1$ இற்கு $f(x) = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2}$ எனக் கொள்வோம். $f(x)$ இன் முதலாம் பெறுதி $f'(x)$ ஆனது $x \neq -1$ இற்கு $f'(x) = \frac{-(x-3)}{(x+1)^3}$ இனால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. **இதிலிருந்து**, $f(x)$ அதிகரிக்கும் x இன் ஆயிடையையும் $f(x)$ குறையும் x இன் ஆயிடையையும் காண்க. அத்துடன், $f(x)$ இன் திரும்பல் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளையும் காண்க. $x \neq -1$ இற்கு $f''(x) = \frac{2(x-5)}{(x+1)^4}$ எனத் **தரப்பட்டுள்ளது**. $y = f(x)$ இன் வரைபின் விபத்திப் புள்ளியின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. அணுகுகோடுகள், திரும்பற் புள்ளி, விபத்திப் புள்ளி ஆகியவற்றைக காட்டி,$y = f(x)$ இன்வரைபை பரும்படியாக வரைக.



(b) உருவில் காட்டியவாறு நீளம் $2(x+y)$ மீற்றர் , அகலம் x மீற்றர் ஆகவுள்ள செவ்வக வடிவ தகட்டின்பரப்பளவு $8\pi m^2$ஆகும்.அத்தகட்டிலிருந்து x m ஆரையுள்ள அரைவட்டப் பகுதியொன்று வெட்டி அகற்றப்பட்டு உருவில் காட்டப்பட்டவாறு நிழற்றப்பட்ட பகுதி பெறப்படுகிறது. $x > 0$ இற்கு, நிழற்றப்பட்ட பகுதியின் சுற்றளவு p m என்பது $p = \pi\left(x + \frac{6}{x}\right)$ என்பதால் தரப்படும் எனக் காட்டுக. p குறைந்தபட்சமாக இருக்கத்தக்கதாக x இன் பெறுமானத்தைக் காண்க.

15 (a)எல்லா $x\epsilon\mathbb{R}$இற்கும்$\boldsymbol{x^4+1=A(x^4-1)+B(x^2+1)(x+1)+C(x^2+1)(x-1)-(x^2-1)}$ ஆக இருக்கத்தக்கதாக A, B, C ஆகிய மாறிலிகளின் பெறுமானங்களைக் காண்க. இதிலிருந்து $\displaystyle\int \boldsymbol{\frac{x^4+1}{x^4-1}dx}$ ஐக் காண்க.

(b) (i) $y = x + \cos x \sin^3 x$ ஆயின் $\frac{dy}{dx} = 1 + 3\sin^2 x - 4\sin^4 x$ எனக் காட்டுக.

$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x\sin^2 x - 4x\sin^4 x) \quad dx$ ஆயின் மேற்படி பேறினையும் பகுதிகளாக

தொகையிடல் முறையையும் பயன்படுத்தி $I = \frac{1}{8}(\pi^2 - 2)$ எனக் காட்டுக.

(ii) $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 3\cos^2 x - 4\cos^4 x), dx$ $J_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 3x\cos^2 x - 4x\cos^4 x)\, dx$ எனவும்

தரப்படின்தொடர்பு$\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx$ ஐப்பயன்படுத்தி$I = \frac{\pi}{2}J_1 - J_2$ எனக்காட்டுக.

இப்போது $\frac{dy}{dx} = 1 + 3\cos^2 x - 4\cos^4 x$ எனத் தரப்படுமிடத்து $J_2 = \frac{1}{8}\,(\pi^2 + 2)$ எனக் காட்டி J_1 இன் பெறுமானத்தை உய்த்தறிக.

(c) $t = \sqrt{x^3+1}$ என்ற பிரதியீட்டைப் பயன்படுத்தி $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^8}{\sqrt{x^3+1}} dx$இன் பெறுமானத்தை காண்க.

16 $l_1: x - \sqrt{3}y + 1 + k = 0$, $l_2: x + \sqrt{3}y + 1 - k = 0$ என்ற கோடுகள் புள்ளி $(-1, 3)$ இனூடு செல்லுமாயின் $k = 3\sqrt{3}$ எனக் காட்டுக. k இன் இப்பெறுமானத்துக்கு கோடுகள் $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ இன் கோண இருகூறாக்கிகளின் சமன்பாடுகளை எழுதுக. இதில் கூர்ங்கோண இருகூறாக்கி $l = 0$ என்க. *l=0* மீது $A \equiv (2,3)$ என்ற புள்ளி அமையும் எனக் காட்டுக.

A இனை மையமாகவும் விட்டம் 3 அலகு உடைய வட்டம் s இன் சமன்பாட்டை எழுதுக. புள்ளி A இலிருந்து கோடு $l_1 = 0$ இற்கான செங்குத்துத்தூரத்தை காண்க. இதிலிருந்து $(-1,3)$ எனும் புள்ளியிலிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடலிகளின் சமன்பாடுகளை உய்த்தறிக. $l = 0$ மீதுள்ள புள்ளி P இலிருந்து வட்டம் $S = 0$ இற்கு வரையப்படும் தொடலிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாகும் எனின் P இற்கு இரு சாத்தியமான நிலைகள் உண்டு எனக் காட்டுக. அப்புள்ளிகளின் ஆள்கூறுகளைக் காண்க. மேலும் அத்தொடலிகளினால் அடைக்கப்படும் நாற்பக்கலின் பரப்பளவைக் காண்க

17(a)(i) $\cos A, \cos B, \sin A, \sin B$ என்பவற்றின் சார்பில் $\cos(A+B)$ ஐ எழுதி இதிலிருந்து $\cos 3A$ இற்கான ஒரு கோவையை $\cos A$ இல் பெறுக.

(ii) $\dfrac{2\cos 3x - 4\cos^5 x + 3\cos^3 x}{\cos x\,(1+\sin^2 x)} = \lambda\cos 2x + k$ ஆகுமாறு மெய் மாறிலிகள் λ, k இனைத் துணிக.

இதிலிருந்து $f(x) = \dfrac{2\cos 3x - 4\cos^5 x + 3\cos^3 x}{\cos x\,(1+\sin^2 x)}$ இன் உயர்வு, இழிவு பெறுமானங்களை கண்டு, சார்பின் வரைபை $x\epsilon[-\pi,\pi]$ எனும் வீச்சில் வரைக.

(b) முக்கோணி ABCயினுள் $P\hat{A}B = P\hat{B}C = P\hat{C}A = \alpha$ ஆகுமாறு புள்ளி P அமைந்துள்ளது. பொருத்தமான இரு முக்கோணிகளை தெரிந்து சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி PC இற்கான இரு கோவைகளை எழுதுக. அதிலிருந்து $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$ எனக் காட்டுக.

(c) $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ இற்கு $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\,x)$ என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க.

***