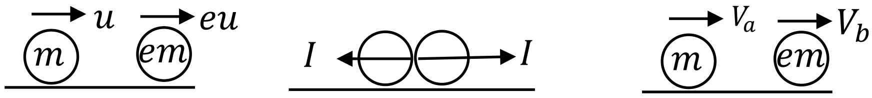
අධ්‍යාපන අමාත්‍යාංශය
கல்வி அமைச்சு
Ministry of Education

අ.පො.ස. (උ.පෙළ) උපකාරක සම්මන්ත්‍රණය - 2022

10 - සංයුක්ත ගණිතය II

ලකුණු දීමේ පටිපාටිය

1. A හා B අංශු දෙකක් අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ ද ස්කන්ධ පිලිවෙලින් m, em ද වේ. A හා B අංශු එකම සරල රේඛාවක් දිගේ පිලිවෙලින් u හා eu ඒකකාර ප්‍රවේග වලින් එකම දිශාවට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි චලනය වෙමින් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් පසු B හි ප්‍රවේගය e ගෙන් ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න. ගැටුම නිසා $\frac{6}{25}mu$ විශාලත්වයකින් යුත් ආවේගයක් ඇති වේ නම් e හි අගය සොයන්න.



$\mathrm{I} = \Delta(\mathrm{mv}) \longrightarrow$ for the system

$0 = (mVa + emVb) - (mu + emeu)$ 5

$Va + eVb = u + e^2u \longrightarrow (1)$

Newton's Experimental Law for the system $\longrightarrow$

$Vb - Va = -e(eu - u) \longrightarrow (2)$ 5

$(1) + (2) \longrightarrow (1+e)Vb = (1+e)u$

$Vb = u$ 5

$Therefore, Velocity\ of\ B\ is\ independent\ from\ e.$

$\mathrm{I} = \Delta(\mathrm{mv}) \longrightarrow$ for B

$I = emVb - emeu = \frac{6}{25}mu$ 5

$eu - e^2u = \frac{6u}{25} \longrightarrow 25e^2 - 25u + 6 = 0$

$(5e-3)(5e-2) = 0$

$e = \frac{3}{5}\ or\ e = \frac{2}{5}$ 5

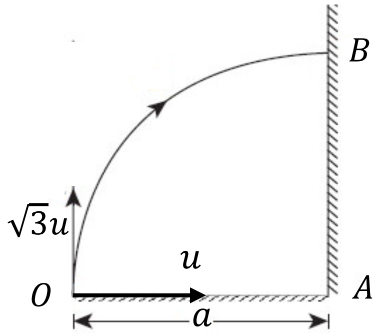
25

---

2. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරස් තලයක පිහිටි O ලක්ෂ්‍යයක සිට පිළිවෙලින් u හා $\sqrt{3}u$ තිරස් හා සිරස් ප්‍රවේග සංරචක වලින් අංශුවක් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව සිය පෙතෙහි උපරිම ලක්ෂ්‍යයට ලගාවන විට O සිට a තිරස් දුරින් පිහිටි සිරස් AB බිත්තියක වූ B ලක්ෂ්‍යයේ වැදී පොලා පනී. සිරස් තලය හා අංශුව අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ නම්,

(i) අංශුව නැවත OA තලයේ වැදීමට ආරම්භයේ සිට ගතවන කාලය,

(ii) අංශුව නැවත OA තලය මත පතිත වන ස්ථානයට A සිට දුර ද, සොයන්න.



$for\ the\ motion\ O - B$

$\uparrow v = u + at$

$0 = \sqrt{3}\,u - gt_1 \longrightarrow t_1 = \frac{\sqrt{3}\,u}{g}$ 5

OR

$\longrightarrow\ s = ut$

$a = ut_1$

$t_1 = \frac{a}{u}$ 5

$for\ the\ motion\ O - B$

$\uparrow v^2 = u^2 + 2as$

$0 = (\sqrt{3}\,u)^2 - 2gh$

$h = \frac{3u^2}{2g}$ 5

$\downarrow s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\frac{3u^2}{2g} = 0 + \frac{1}{2}gt_2^2 \longrightarrow t_2 = \frac{\sqrt{3}u}{g} = \frac{a}{u}$ 5

$T = t_1 + t_2 = \frac{2\sqrt{3}u}{g}\ or\ \frac{2a}{u}$ 5

$\leftarrow s = ut$

$s = \frac{1}{2}ut_2$

$s = \frac{1}{2}u.\frac{a}{u}$

$s = \frac{u}{2}$ 5

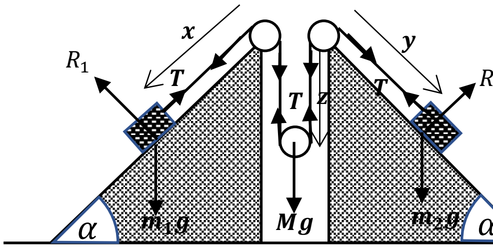
Note:

Since the same vertical distance T=2t_1

$\therefore\ T = \frac{2a}{u}$

25

3. රූප සටහනේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධයන් m_1 හා m_2 වූ අංශු දෙකක් **අචල,** සුමට කුඤ්ඤ දෙකක් මත තබා ඇත. m_1 අංශුවට ඈඳන ලද ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් අචල සුමට කප්පියක් මතින් යවා ස්කන්ධය M සුචල සුමට කප්පිය යටින් ගමන් කර නැවත අචල කප්පියක් මතින් ගොස් m_2 අංශුවට ඈඳ ඇත. අංශු හා තන්තු සිරස් තලයක පිහිටයි. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදාහරිනු ලැබේ. අංශුවල ත්වරණත් තන්තුවේ ආතතියත් සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න. කුඤ්ඤ දෙකෙහිම ආනත පෘෂ්ඨ වල ආනතිය α වේ.
(නිදහස්ව ඇති තන්තු කොටස් සිරස් හෝ කුඤ්ඤ වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛාව ඔස්සේ වේ.)



5

$x + y + 2z + k = l$

$\ddot{x} + \ddot{y} + 2\ddot{z} = 0$ ----- 5

$f = ma$

for m_1 ↙ $m_1 g\, sin\alpha - T = m_1 \ddot{x}$ ------ 5

for m_2 ↘ $m_2 g\, sin\alpha - T = m_2 \ddot{y}$ ------ 5

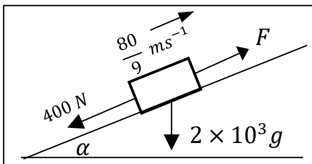
for M ↓ $Mg - 2T = M\ddot{z}$ -------------- 5

25

---

4. ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 2 ක් වූ මෝටර් රථයක් තිරසට $sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)$ ආනතියකින් යුත් සෘජු මාර්ගයක් දිගේ නියත $32\ km\ h^{-1}$ ප්‍රවේගයෙන් ඉහළට ගමන් කරයි. චලිතයට 400 N ක නියත ප්‍රතිරෝධයක් ඇත. රථයේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.

මෙම රථය එම ජවයෙන් සහ එම නියත ප්‍රතිරෝධයෙන් සමතලා මාර්ගයක ගමන් කරයි. රථයේ ප්‍රවේගය $32\ km\ h^{-1}$ වන විට එහි ත්වරණය සොයන්න. ($g = 10\ m\ s^{-2}$යැයි ගන්න)



$32\ km\ h^{-1} = \frac{80}{9}\ ms^{-1}$ 5

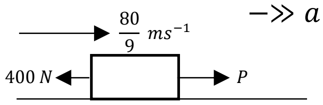
$f = ma$

$F - 400 - 20000\ sin\alpha = 0$

$F = 2400\ N$ 5

$H = FV$

$H = 2400 \times \frac{80}{9} = \frac{64}{3}\ kW$ 5



$H = FV$

$\frac{64000}{3} = P \times \frac{80}{9}$

$P = 2400\ N$ 5

$f = ma \longrightarrow$

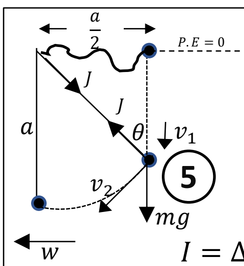
$2400 - 400 = 2000a$

$a = 1\ ms^{-2}$ 5

25

---

5. දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙලවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර, අනෙක් කෙළවරට ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් ඈඳ ඇත. O සමග එකම තිරස් මට්ටමේ $\frac{a}{2}$ තිරස් දුරින් වූ ලක්ෂ්‍යයක සිට එම අංශුව නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හැරේ. තන්තුව ගැස්සීමෙන් මොහොතකට පසු අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයා, තන්තුව සිරස් වන විට අංශුවේ ප්‍රවේගය නිර්ණය කිරීමට සමීකරණයක් ශක්ති සංස්ථිති නියමය ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.



$sin\theta = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \frac{1}{2} \longrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ 5

$v^2 = u^2 + 2as$ ↓

${v_1}^2 = 0 + 2ga\cos\frac{\pi}{6}$

${v_1}^2 = \sqrt{3}\ ga$ 5

$I = \Delta(mv)$ perpendicular to the string

$mv_2 - mv_1 sin\frac{\pi}{6} = 0$

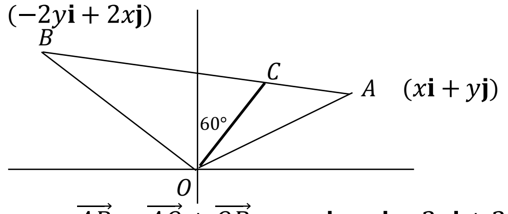
$v_2 = \frac{\sqrt{\sqrt{3}\ ga}}{2}$ 5

conservation of energy

$\frac{1}{2}mw^2 - mga = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - mga cos\theta$ 5

25

6. O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ හා $-2y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}$ වේ. මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ යනු OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික වේ. AB රේඛාව $AC:CB = 1:2$ අනුපාතයට බෙදන C ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න. OC රේඛාව හා OY අක්ෂය අතර කෝණය $60°$ නම් $x^2+y^2+4xy=0$ බව පෙන්වන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB} = -x\mathbf{i}-y\mathbf{j}-2y\mathbf{i}+2x\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = -(x+2y)\mathbf{i}+(2x-y)\mathbf{j}$$ 5

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\,[-(x+2y)\mathbf{i}+(2x-y)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\frac{1}{3}\,[-(x+2y)\mathbf{i}+(2x-y)\mathbf{j}]$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\{(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}\}$$ 5

$$\overrightarrow{OC}.\mathbf{j} = |\overrightarrow{OC}|.|\mathbf{j}|.cos60°$$ 5

$$\frac{2}{3}\{(x-y)\mathbf{i}+(x+y)\mathbf{j}\}.\mathbf{j} = \sqrt{\left(\frac{2x-2y}{3}\right)^2+\left(\frac{2x+2y}{3}\right)^2}\,.\,\mathbf{1}.\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$ 5

$$\frac{2x+2y}{3} = \frac{2\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}}{6}$$

$$2(x+y) = \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

$$4(x+y)^2 = 2(x^2+y^2)$$

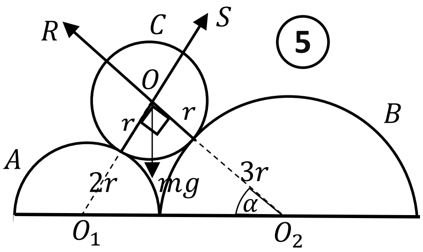
$$4x^2+4y^2+8xy = 2x^2+2y^2$$

$$x^2+y^2+4xy = 0$$ 5

25

---

7. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි අරයන් පිළිවෙලින් 2r හා 3r වූ එකිනෙක ස්පර්ෂව පවතින A හා B අචල සුමට අර්ධ ගෝල මත අරය r වූ ද ස්කන්ධය m වූ ද සුමට C ගෝලයක් සමතුලිතව තබා ඇත. C ගෝලය මත A හා B අර්ධ ගෝල මගින් ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. O, O_1 හා O_2 කේන්ද්‍ර එකම සිරස් තලයක පිහිටයි.



5

$$O_1\hat{O}O_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ and } cos\alpha = \frac{4}{5}$$

for the equilibrium of C,

$$S = mg\,cos\alpha$$ 5

$$S = \frac{4mg}{5}.$$ 5

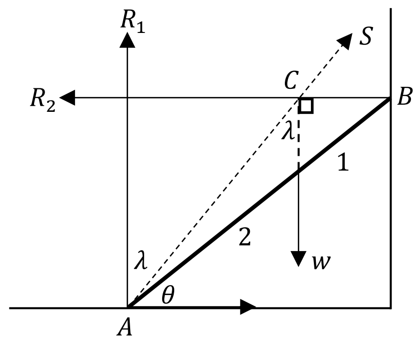
$$R = mg\,sin\alpha$$ 5

$$R = \frac{3mg}{5}.$$ 5

25

---

8. AB දණ්ඩක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය 2: 1 අනුපාතයට වේ. එහි A කෙළවර රළු තිරස් තලයක් මත ද B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක් හා ස්පර්ශ වෙමින් දණ්ඩ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ පවතී. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ ද තලය හා දණ්ඩේ A කෙළවර අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය μ ද වේ. $tan\theta$ හි අගය μ ඇසුරින් ලබාගන්න.



5

Applying cot *theorem for the triangle ABC,*

$$(2+1)\cot(90-\theta) = 2cot\lambda - 1cot90°$$ 10

$$3\,tan\theta = \frac{2}{tan\lambda}$$ 5

$$tan\theta = \frac{2}{3\,\mu}$$ 5

25

9. A හා B යනු පහත අවස්ථා සපුරාලනු ලබන සිද්ධි දෙකකි.

(i) A පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.2 වේ.

(ii) B පමණක් සිදුවීමේ සම්භාවිතාවය 0.1 වේ.

(iii) A හෝ B දෙකෙන් එකක් වත් සිදු නොවීමේ සම්භාවිතාවය 0.6 වේ.

$P(A/B) = \frac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$P(A \cap B') = 0.2\,, P(A' \cap B) = 0.1\,, P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 0.6$ 5

$P(A \cap B') + P(A' \cap B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$ 5

$0.2 + 0.1 = (1 - 0.6) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0.1$ 5

$P(A' \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$

$P(B) = 0.1 + 0.1 = 0.2$ 5

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A/B) = \frac{0.1}{0.2}$

$P(A/B) = \frac{1}{2}$ 5

$\boxed{25}$

---

10. සංඛ්‍යා දහයක මධ්‍යන්‍යය $9 \cdot 4$ වේ. k තාත්වික සංඛ්‍යාවක සිට එම සංඛ්‍යාවල අපගමනයන් පහත පරිදි වේ.

d_i: -5, -2, -1, -1, -1, 0, 1, 1, 2, 6

සංඛ්‍යා දහයෙහි මධ්‍යස්ථය හා විචලතාව සොයන්න.

d_i	-5	-2	-1	-1	-1	0	1	1	2	6
x_i	k-5	k-2	k-1	k-1	k-1	k	K+1	K+1	K+2	K+6

$where, d_i = x_i - k ---\rightarrow x_i = d_i + k$ 5

$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{10} = 9.4\ (given)$

$\frac{10k - 10 + 10}{10} = 9.4$

$k = 9.4$ 5

x_i	4.4	7.4	8.4	8.4	8.4	9.4	10.4	10.4	11.4	15.4

5

$Median = \frac{8.4 + 9.4}{2} = 8.9$ 5

$\overline{\mathrm{d}} = \overline{\mathrm{x}} - k = 0$

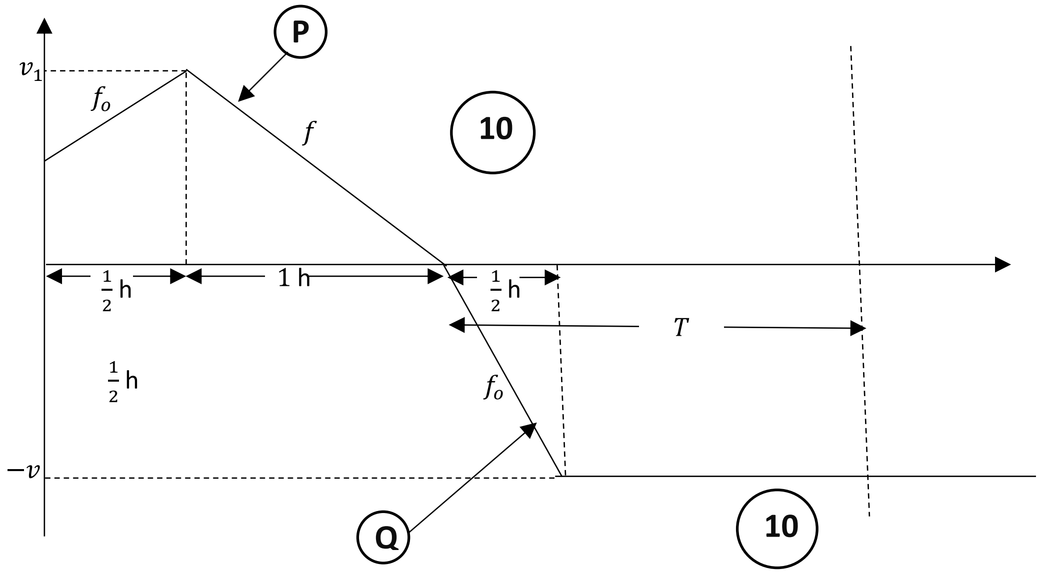
$\sigma_x{}^2 = \sigma_d{}^2 = \frac{\sum d_i{}^2}{10} - \overline{d}$

$\sigma_x{}^2 = \frac{74}{10} - 0 = 7.4$ 5

$\boxed{25}$

11. (a) A නම් දුම්රිය ස්ථානයක සිට u ප්‍රවේගයෙන් චලිතය අරඹන P නම් දුම්රියක්, ඒකාකාර ත්වරණයෙන් පැය බාගයක් ගමන් කර ඉන්පසු තවත් පැයක් f ඒකකාර මන්දනයෙන් ගමන් කර B දුම්රිය ස්ථානයේ දී නිසලතාවයට පැමිණේ. P දුම්රිය, B වෙත ලගාවන මොහොතේ දී ම Q නම් වෙනත් දුම්රියක්, B දුම්රිය ස්ථානයේ සිට A දුම්රිය ස්ථානය දෙසට නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය අරඹයි. Q දුම්රිය පැය බාගයක් P දුම්රියේ ආරම්භක ඒකකාර ත්වරණයෙන්ම ගමන් කර ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන්, A දුම්රිය ස්ථානයේ නොනවත්වා ම ධාවනය කරයි. P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එකම රූපයක දක්වන්න.

ඒ නයින්, P දුම්රියේ ත්වරණය සොයා Q දුම්රිය සිය චලිතය අරඹා $\frac{f}{f-u}$ කාලයකට පසු එය A දුම්රිය ස්ථානය පසු කරන බව පෙන්වන්න.



20

$$tan\alpha = \frac{v_1 - u}{\frac{1}{2}} = f_o \longrightarrow f_o = 2(v_1 - u) \text{------[1]}$$ 5

5

$$tan\beta = \frac{v_1}{1} = f \longrightarrow v_1 = f$$ 5

$$f_o = 2(f-u).$$ 5

20

$$tan\gamma = \frac{v}{\frac{1}{2}} = f_o \longrightarrow 2v = f_o \longrightarrow v = \frac{f_o}{2} = f-u$$ 5 5

$$S_p = S_Q$$ 5

5 $$\frac{(u+v_1)}{2} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times 1 \times v_1\right) = \left(\frac{T + T - \frac{1}{2}}{2}\right) v$$ 5

$$\left(\frac{u+f}{4}\right) + \frac{f}{2} = \frac{(4T-1)}{4}(f-u)$$

$$u + f + 2f = (4T-1)(f-u)$$

$$\frac{u+3f}{f-u} = 4T - 1$$ 5

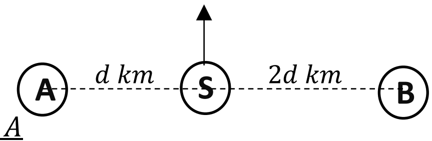
$$4T = \frac{4f}{f-u}$$

$$T = \frac{f}{f-u}$$ 5

35

(b) S නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් උතුරු දෙසට යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක S ගෙන් $d\ km$ දුරක් බටහිරින් A බෝට්ටුවක් ද $2d\ km$ දුරක් නැගෙනහිරින් B බෝට්ටුවක් ද පිහිටයි. A බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $\frac{3u}{2}\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරන අතර B බෝට්ටුව පොළොවට සාපේක්ෂව $2u\ km\ h^{-1}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් සරල රේඛීය පෙතක S නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් ගමන් කරයි. A හා B හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ වෙන වෙනම ඇඳීමෙන් මුලින්ම නැව අල්ලා ගන්නේ කුමන බෝට්ටුව දැයි සොයන්න.

$V_{SE} = u \uparrow \quad V_{AE} = \frac{3u}{2} \quad V_{BE} = 2u$



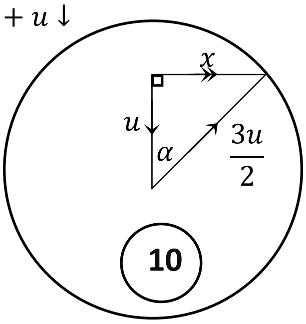
For A

$V_{AS} = \rightarrow$

$V_{AS} = V_{AE} + V_{ES}$ 5

$\rightarrow x \quad = \frac{3u}{2} + u \downarrow$

5

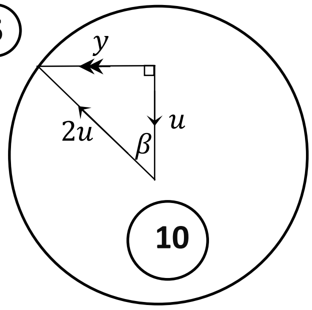


For B

$V_{BS} = \leftarrow$ 5

$V_{BS} = V_{BE} + V_{ES}$

$\leftarrow y \quad = 2u + u \downarrow$ 5



$$x^2 = \left(\frac{3u}{2}\right)^2 - u^2 = \frac{5u^2}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5}\,u}{2}$$ 5

$$t_A = \frac{d}{\left(\frac{\sqrt{5}\,u}{2}\right)} = \frac{2d}{\sqrt{5}\,u}$$ 10

$$y^2 = (2u)^2 - u^2 = 3u^2$$

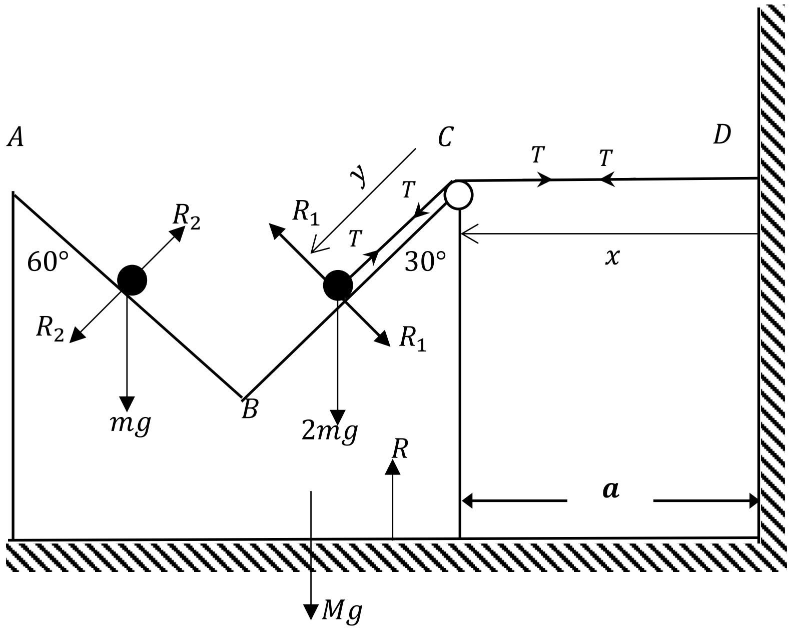
$$y = \sqrt{3}u$$ 5

$$t_B = \frac{2d}{\sqrt{3}u}$$ 5

Since, $t_A < t_B$ boat A will catch the ship before B 10

75

12. (a) රූපයේ දැක්වෙන්නේ සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇති ස්කන්ධය M වූ සුමට ඒකාකාර කූඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් හරස්කඩ වේ. AB හා BC රේඛා ඒවා අඩංගු මුහුණත් වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. D යනු කූඤ්ඤයේ සිට a දුරින් පිහිටි සිරස් බිත්තිය මත, A හා C සමඟ එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි අවල ලක්ෂ්‍යය වේ. C හි පිහිටි අවල සුමට කප්පිය මතින් යන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශුවකට ඈඳා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර D ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත. ස්කන්ධය m වූ තවත් අංශුවක් AB මුහුණත මත අල්වා තබා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. එක් අංශුවක් හෝ B වෙත ළඟාවීමට ප්‍රථම කූඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවේ නම්, කූඤ්ඤය බිත්තිය වෙත ළඟාවීමට ගතවන කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



$x + y = k$

$\ddot{x} + \ddot{y} = 0 \rightarrow \ddot{x} = -\ddot{y}$ 5

$a_{WE} = \rightarrow F$ $\quad a_{QW} = f \searrow$ $\quad a_{PW} = F \swarrow$

$a_{PE} = \swarrow F \; \rightarrow F$ 5 $\quad a_{QE} = \searrow f \; \rightarrow F$ 5

$F = ma$ 5 $(Forces)$ 5 $(Accelerations)$

$for\ Q \searrow \quad mg\cos 60 = m\,(f + F\cos 30) \dashrightarrow (1)$ 5 $(Equation)$

5 $(Forces)$ 5 $(Accelerations)$

$for\ P \swarrow \quad 2mg\cos 30 - T = 2m\,(F - F\cos 60) \dashrightarrow (2)$ 5 $(Equation)$

$for\ the\ system \rightarrow$

5 5 5 $(Accelerations)$

$T = MF + 2m(F - F\cos 60) + m(F + f\cos 30) \dashrightarrow (3)$ 5 $(Equation)$

5 $(Forces)$

$for\ wedge \dashrightarrow$

$s = ut + \frac{1}{2}at^2$

$a = 0 + \frac{1}{2}Ft^2 \dashrightarrow (4)$ 5

Note:
when equation has not written, provide marks for the forces marked in the diagram.

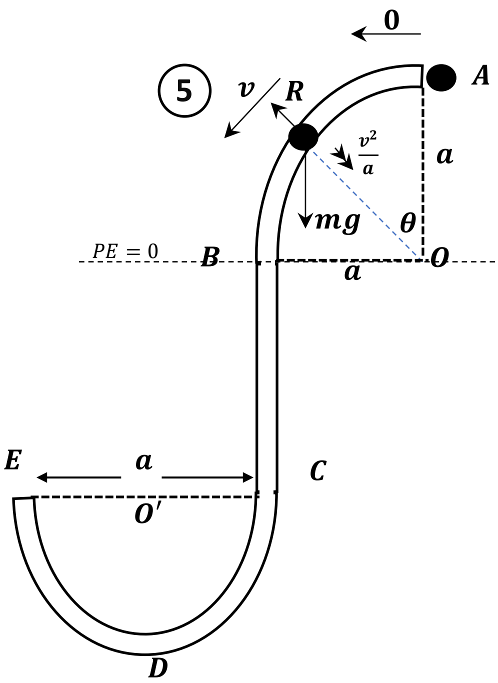
75

(b) රූපයේ දැක්වෙන පරිදි $ABCDE$ සුමට තුනී නලයක් සිරස් තලයක සවි කර ඇත. AB කොටස කේන්ද්‍රය O වූ ද අරය a වූ ද වෘත්තයක $A\hat{O}B = \frac{\pi}{2}$ පරිදි වූ වෘත චාපයකි. BC යනු දිග a වූ සිරස් කොටසක් වේ. CDE යනු විශ්කම්භය a වූ අර්ධ වෘත්තාකාර කොටසකි. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A හි තබා සීරුවෙන් නලය තුලට මුදාහරී.

(i) A සිට B දක්වා P හි චලිතයේ දී OA සමග θ $\left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් OP සාදන විට, එහි වේගය v නම් $v^2 = 2ga(1 - cos\theta)$ බව පෙන්වන්න.

P මත නලය මගින් ඇතිකෙරෙන අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාව R නම්, R සොයන්න. තවද θ හි අගය $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ දී ප්‍රතික්‍රියාවේ දිශාව ප්‍රතිවිරුද්ධ වන බව පෙන්වන්න.

(ii) E හිදී ප්‍රවේගය සොයා අභිලම්භ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $8mg$ වන බව පෙන්වන්න.



(i) *Law of energy conservation*

$$mga = \frac{1}{2}mv^2 + mgacos\theta \quad 15$$

$$v^2 = 2ga(1 - cos\theta) \quad 5$$

25

(ii) $F = ma$

$$mg\ cos\theta - R = m\frac{v^2}{a} \quad 10$$

$$R = mg\ cos\theta - 2mg(1 - cos\theta)$$

$$R = mg(3cos\theta - 2) \quad 5$$

$$let\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$when\ 0 < \theta < \alpha \dashrightarrow R > 0$$
$$\alpha < \theta < \frac{\pi}{2} \dashrightarrow R < 0 \quad 5$$

Therefore,
R taking opposite direction pasing the posistion
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. 5

25

(iii) $when\ \theta = \frac{\pi}{2} \dashrightarrow v^2 = 2ga \dashrightarrow v = \sqrt{2ga}$

from B to C
law of energy conservation

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}(2ga) = \frac{1}{2}\mathrm{m}v_C^2 - mga \quad 10$$

$$v_C = 2\sqrt{ga}$$

$$v_C = v_E = 2\sqrt{ga} \quad 5$$

At the point E, $F = ma \dashrightarrow$

$$R_E = m\left(\frac{v_E^2}{a/2}\right) = 8mg \quad 5$$

5

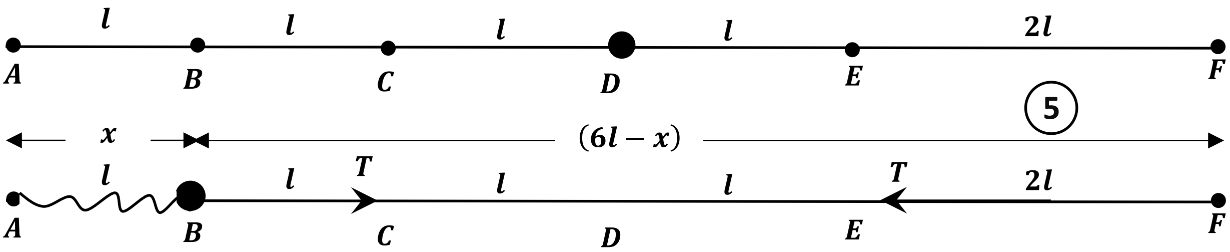
25

13. A, B, C, D, E හා F යනු සුමට තිරස් මේසයක් මත $AB = BC = CD = DE = l$ හා $EF = 2l$ වන පරිදි සරල රේඛීයව පිහිටි ලක්ෂ්‍ය හයකි. දිග $4l$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගින් A හා F ලක්ෂ්‍ය සම්බන්ධ කර, මේසය මත චලනය විය හැකි ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් D හිදී තන්තුවට සවිකර ඇත. අංශුව B වෙත ඇද නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව t කාලයකදී A සිට E දෙසට x, $(l \leq x \leq 2l)$ දුරක් විස්ථාපනය වේ නම් අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \frac{\lambda}{2ml}(x - 4l) = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය වේ.

(i) $X = x - 4l$ ලෙස ගැනීමෙන් $\ddot{X} + \frac{\lambda}{2ml}X = 0$ බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසදුම් $X = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ ආකාරයේ යැයි උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයයන් සොයන්න.
ඒ නයින් අංශුව $\sqrt{\frac{2lm}{\lambda}} \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ කාලයකට පසු $\sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ ප්‍රවේගයෙන් C ලක්ෂ්‍යය පසු කරන බව පෙන්වන්න.

(ii) $2l \leq x \leq 4l$ සදහා Y සුදුසු ලෙස තෝරාගැනීමෙන්, අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{Y} + \frac{\lambda}{ml}Y = 0$ යන්නෙන් දෙනු ලබනු බව පෙන්වන්න.
ඉහත සමීකරණයේ විසදුම් $Y = \alpha' \cos(\omega'(t - t_0)) + \beta' \sin(\omega'(t - t_0))$ ආකාරයෙන් පවතී යැයි උපකල්පනය කරමින් α', β' හා ω' නියත වල අගයයන් සොයන්න. මෙහි $t_0 = \sqrt{\frac{2lm}{\lambda}} \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ වේ.

(iii) ආරම්භයේ සිට P අංශුව E ලක්ෂ්‍යය වෙත පළමු වරට පැමිණීමට ගතවන කාලය $2\sqrt{\frac{l}{m}} \left\{\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ බව පෙන්වන්න.



$(\boldsymbol{i})$ *when* $l \leq x \leq 2l$

$$T = \frac{\lambda}{2l}(6l - x - 2l) \quad 5$$

$$T = \frac{\lambda}{2l}(4l - x)$$

Applying, $F = ma$

$m \dashrightarrow \; T = m\ddot{x} \quad 5$

$$\frac{\lambda}{2l}(4l - x) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{2ml}(x - 4l) = 0 \quad 5$$

put, $x - 4l = X \dashrightarrow \ddot{x} = \ddot{X} \quad 5$

$$\ddot{X} + \frac{\lambda}{2ml}X = 0$$

$X = x - 4l = \alpha \cos\omega t + \beta \sin\omega t$

$t = 0, x = l, -3l = \alpha \quad 5$

$\dot{X} = \dot{x} = -\alpha\omega \sin\omega t + \beta\omega \cos\omega t \quad 5$

$t = 0, x = l, \dot{x} = 0$

$0 = \beta\omega \dashrightarrow \beta = 0 \quad 5$

$\ddot{X} = \ddot{x} = -\alpha\,\omega^2 \cos\omega t - \beta\,\omega^2 \sin\omega t \quad 5$

$\ddot{X} = -\omega^2(\alpha \cos\omega t + \beta \sin\omega t)$

$\ddot{X} = -\omega^2 X \dashrightarrow \ddot{X} + \omega^2 X = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda}{2ml}} \quad 5$$

$x = 4l - 3l \cos\omega t$

$x = 2l, \quad t?$

$2l = 4l - 3l \cos\omega t$

$$\cos\omega t = \frac{2}{3} \dashrightarrow t = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad 5$$

$$t = \sqrt{\frac{2ml}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

here, $\dot{x} = 3l\omega \sin\omega t$

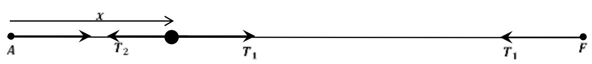
$$\dot{x} = 3l\omega\sqrt{1 - \cos^2 \omega t} \dashrightarrow 3l\omega\sqrt{1 - \frac{4}{9}}$$

$$\dot{x} = 3l\omega\frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}l\omega = \sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$$

$\therefore$ *the velocity at C is* $\sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}} \quad 5$

60

$(\boldsymbol{ii})$ *when* $2l \leq x \leq 4l$



$$T_1 = \frac{\lambda}{2l}(6l - x - 2l) = \frac{\lambda}{2l}(4l - x)$$

$$T_2 = \frac{\lambda}{2l}(x - 2l) \quad 5$$

$m \dashrightarrow \quad T_1 - T_2 = m\ddot{x}$ 5

$T_1 - T_2 = \frac{\lambda}{2l}(4l - x + 2l - x) = m\ddot{x}$ 5

$\frac{\lambda}{2l}2(3l - x) = m\ddot{x}$

$\ddot{x} = \frac{\lambda}{ml}(3l - x) \dashrightarrow \ddot{x} + \frac{\lambda}{ml}(x - 3l)$ 5

$similarly\ take\ (x - 3l) = Y$

$\ddot{Y} + \frac{\lambda}{ml}Y = 0$

$Now, Y = \alpha' \cos\omega'(t - t_0) + \beta' \sin\omega'(t - t_0)$ 5

$when\ t = t_0, x = 2l\ and\ \dot{x} = \dot{Y} = \sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ 5

$2l - 3l = \alpha' \dashrightarrow \alpha' = -l$ 5

$\dot{x} = \dot{Y} = -\alpha' \omega' \sin\omega'(t - t_0) + \beta'\omega' \cos\omega'(t - t_0)$ 5

$\beta'\omega' = \sqrt{\frac{5\lambda l}{2m}}$ 5

$similarly, \quad \omega' = \sqrt{\frac{\lambda}{ml}} \dashrightarrow \beta' = l\sqrt{\frac{5}{2}}$ 5

$\boxed{50}$

$(\boldsymbol{iii})\ x - 3l = -l\cos\omega'(t - t_0) + l\sqrt{\frac{5}{2}}\sin\omega'(t - t_0)$ 5

$when\ x = 4l, t?$

$l = -l\cos\omega'(t - t_0) - l\sqrt{\frac{5}{2}}\sin\omega'(t - t_0)$ 5

$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\cos\omega'(t - t_0) - \sqrt{\frac{5}{7}}\sin\omega'(t - t_0)$ 5

$= \cos\beta\cos\omega'(t - t_0) - \sin\beta\sin\omega'(t - t_0)$ 5

$where, \cos\beta = \sqrt{\frac{2}{7}}\ and\ \sin\beta = \sqrt{\frac{5}{7}}$ 5

$\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \cos\{\beta + \omega'(t - t_0)\}$ 5

$\beta + \omega'(t - t_0) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

$\omega'(t - t_0) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)$

$t = \frac{1}{\omega'}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)\right\} + t_0$ 5

$t = \sqrt{\frac{ml}{\lambda}}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)\right\} + \sqrt{\frac{2ml}{\lambda}}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

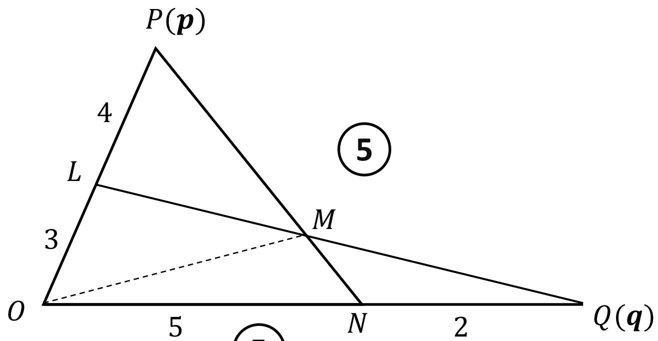
$t = \sqrt{\frac{ml}{\lambda}}\left\{\pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right) + \sqrt{2}\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$ 5

$\boxed{40}$

14. (a)

O ලක්ෂ්‍යයක් අනුබද්ධයෙන් P හා Q ලක්ෂ්‍ය වල පිහිටුම් දෛශික පිලිවෙලින් $\underline{\mathbf{p}}$ හා $\underline{\mathbf{q}}$ වේ. L යනු $OL : LP = 3 : 4$ වන පරිදි OP මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද N යනු $ON : NQ = 5 : 2$ වන පරිදි OQ මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් ද වේ. PN සහ QL රේඛා වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය M නම් $\overrightarrow{OM} = \underline{\mathbf{q}} + \lambda\left(3\underline{\mathbf{p}} - 7\underline{\mathbf{q}}\right)$ බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු අදිශයකි.

$\overrightarrow{OM}$ සඳහා තවත් ප්‍රකාශනයක් ලබා ගැනීමෙන් M ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය $\underline{\mathbf{p}}$ හා $\underline{\mathbf{q}}$ ඇසුරින් සොයන්න.



5

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QM}$ 5

$= \overrightarrow{OQ} + \alpha\overrightarrow{QL}$ 5

$= \overrightarrow{OQ} + \alpha\left(\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OL}\right)$ 5

$= \boldsymbol{q} + \frac{\alpha}{7}(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q})$ 5

$= \boldsymbol{q} + \lambda(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q}) \quad where\ \lambda = \alpha/7$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$ 5

$= \boldsymbol{p} + \beta\overrightarrow{PN}$ 5

$= \boldsymbol{p} + \beta\left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}\right)$

$= \boldsymbol{p} + \beta\left(-\boldsymbol{p} + \frac{5}{7}\boldsymbol{q}\right)$ 5

$= \boldsymbol{p} + \mu(5\boldsymbol{q} - 7\boldsymbol{p}) \quad where\ \mu = \frac{\beta}{7}$ 5

$Now, \quad \boldsymbol{q} + \lambda(3\boldsymbol{p} - 7\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} + \mu(5\boldsymbol{q} - 7\boldsymbol{p})$ 5

$1 - 7\lambda = 5\mu\ and\ 1 - 7\mu = 3\lambda \quad (\boldsymbol{p} \not\parallel \boldsymbol{q})$ 5 5

$\lambda = \frac{1}{17} \dashrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{17}(3\boldsymbol{p} + 10\boldsymbol{q})$ 5

5

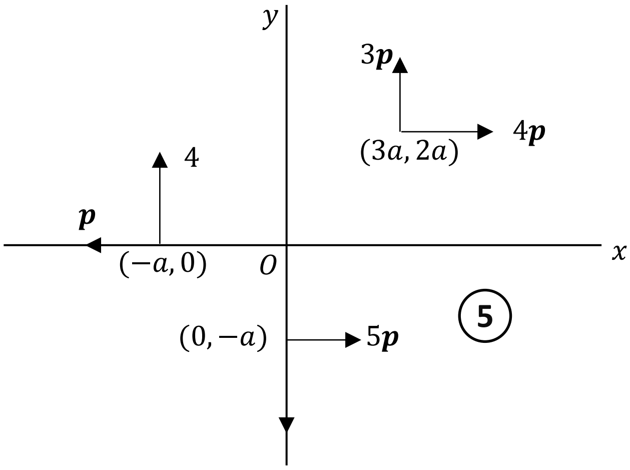
$\boxed{70}$

(*b*) XY තලයේ O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් ක්‍රියාකරන බල තුනකින් සමන්විත ඒකතල බල පද්ධතියක් පහත දැක්වේ.

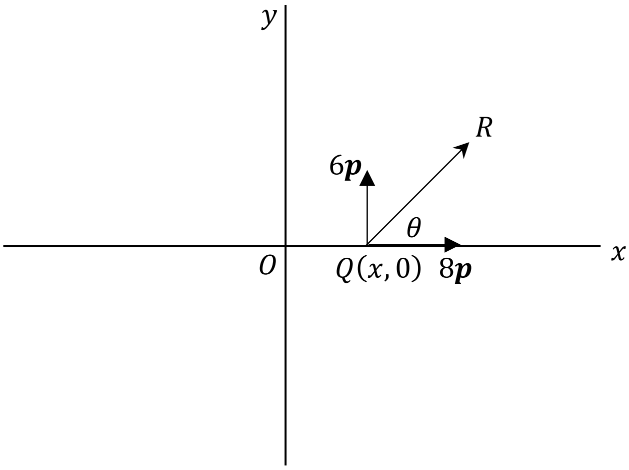
ලක්ෂ්‍යය	පිහිටුම් දෛශිකය	බලය
A	$3a\,\mathbf{i} + 2a\,\mathbf{j}$	$4P\,\mathbf{i} + 3P\,\mathbf{j}$
B	$-a\,\mathbf{i}$	$-P\,\mathbf{i} + 4P\,\mathbf{j}$
C	$-a\,\mathbf{j}$	$5P\,\mathbf{i} - P\,\mathbf{j}$

මෙහි $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ යනු සුපුරුදු අංකනයෙන් පිළිවෙලින් OX හා OY අක්ෂ ඔස්සේ ඒකක දෛශික ද P හා a යනු පිළිවෙලින් නිව්ටන් හා මීටර් වලින් මනින ලද ධන රාශි ද වේ.
පද්ධතිය විශාලත්වය $10P\,N$ තනි බලයකට ඌණනය වන බව පෙන්වා එම තනි බලයේ දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එම තනි බලයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය $4y = 3x + 6a$ බවට පත් කිරීම සඳහා පද්ධතියට එක් කළ යුතු යුග්මයේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න.



5



$\rightarrow X = 4p + 5p - p = 8p$ 5

$\uparrow Y = 3p - 4p - p = 6p$ 5

$R = \sqrt{(8p)^2 + (6p)^2} = 10\,p$ 5

$tan\theta = \dfrac{3}{4}$ 5

$R \neq 0$, Thus the system cn be equivalant to a single force $R = 10p$ 5

Taking moments about O

$G = (4p \times 3a - 4p \times 2a) + (-4p \times a) + 5pa = 2pa \dashrightarrow 6p \times x = 2pa$

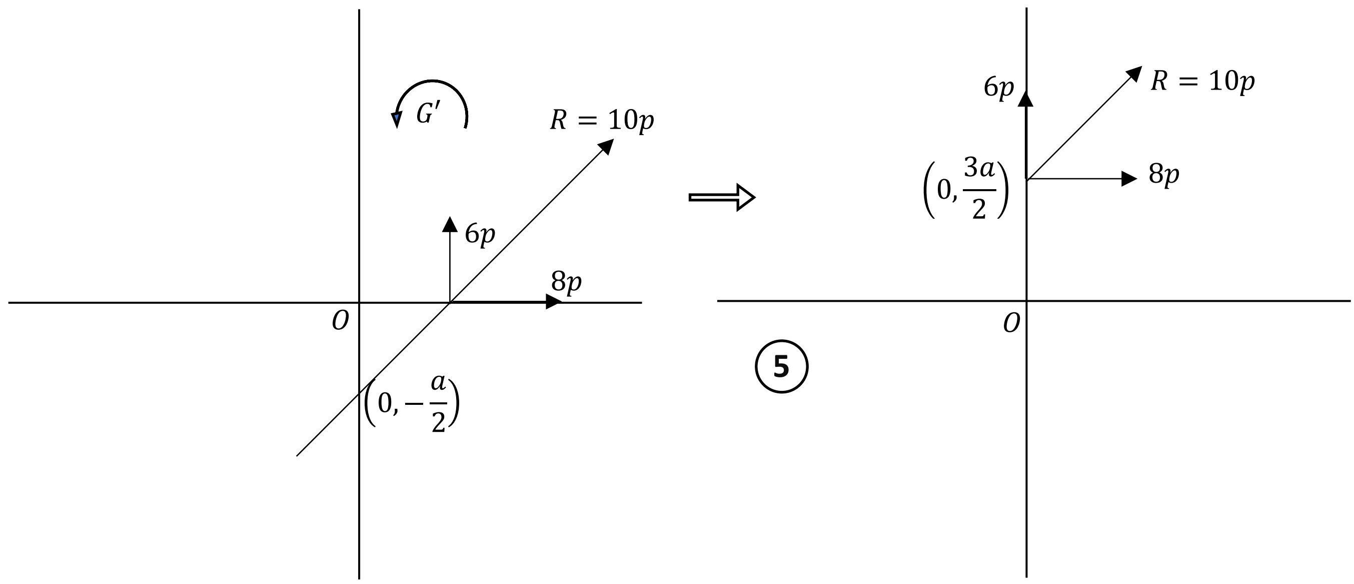
10 5

$x = \dfrac{1}{3}a$ 5

Equation of line of the action

$y - 0 = \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{1}{3}a\right) \dashrightarrow 4y = 3x - a$ 5

5



Let G' be the required moment of the couple, taking moment about O

$G' + 6p.\frac{a}{3} = -8p.\frac{3a}{2}$ 10

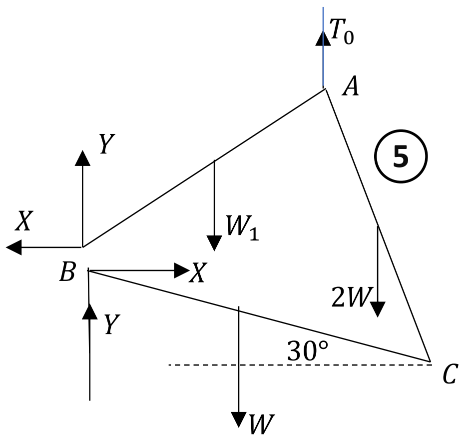
$G' = 14pa$ 5

80

---

15. (a) AB, BC හා AC ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ අග්‍ර සුවල ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC දඬු වල බර W බැගින් වන අතර AC හි බර $2W$ වේ. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් නිදහස් ලෙස එල්ලා ඇත. AC දණ්ඩ සිරසට දරණ ආනතිය θ වේ. $tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ බව පෙන්වන්න.

θ ඇසුරෙන් B සන්ධියේ දී AB මත ප්‍රතික්‍රියාව සෙවීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලියා දක්වන්න.



Let $AB = 2a$

for the equilibrium of ABC takinf moment about A

$W.a\sin(60-\theta) + W.2acos30°\cos(60+\theta) = a.2W\ sin\theta$ 15

$\sin(60-\theta) + \sqrt{3}\cos(60+\theta) = 2sin\theta$

$sin60cos\theta - cos60\ sin\theta + \sqrt{3}(cos60cos\theta - sin60sin\theta = 2sin\theta$ 10

$\frac{\sqrt{3}}{2}.cos\theta - \frac{1}{2}sin\theta + \sqrt{3}(\frac{1}{2}cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\theta = 2sin\theta$

$tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{4} --\rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 5

for the equilibium of AB taking moment about A 10

$Y.a\sin(60-\theta) - x.2\,a\cos(60-\theta) + W.a\sin(60-\theta) = 0$

for CB taking moment about C

$-2X.a\ \sin(30-\theta) - Y.2a\ cos(30-\theta) + W.a\,cos(30-\theta) = 0$

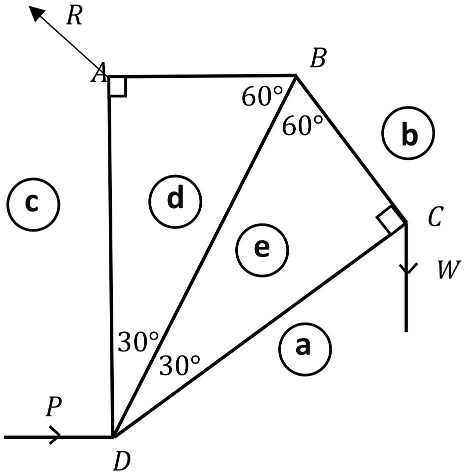
10

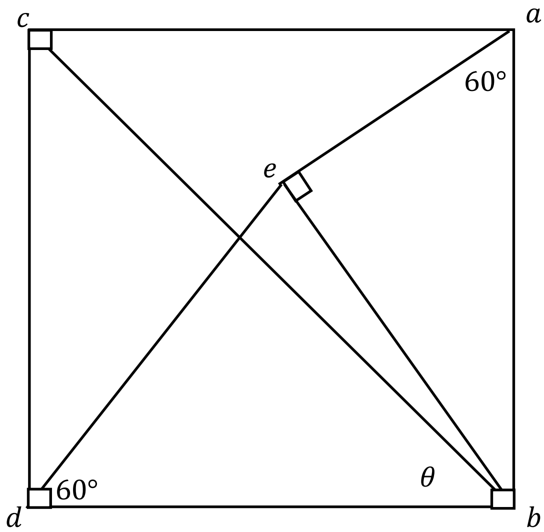
55

(b) AB, BC, CD, DA හා BD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර රූපයේ දැක්වෙන පරිදි වූ රාමු සැකිල්ල සාද ඇත. මෙහි $AB = BC, AD = CD$, $A\hat{D}B = C\hat{D}B = 30°$ හා $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 60°$ වේ. රාමු සැකිල්ල A හිදී සුමට ලෙස අසව් කර ඇති අතර C හිදී W භාරයක් එල්ලා ඇත. D හිදී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් AB තිරස්ව හා AD සිරස්ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පවතී. බෝ අංකනය භාවිතයෙන් C, B හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ එමගින්,

(i) දඬු වල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් වෙන් කර දක්වන්න.

(ii) P බලයේ විශාලත්වයත් A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න.





30

Rod	Tension	Thrust
AB	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$	-
BC	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$	-
CD	-	$\frac{W}{2}$
DA	W	-
DB	-	$\frac{\sqrt{3}}{2}W$

50

Hence, $P = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ $\quad R = \frac{\sqrt{3}}{2}W$ $\quad tan\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5 5 5

95

16.

(i) අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් ද

(ii) උස h වූ ඒකාකාර සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි පතුලේ සිට $\frac{1}{4}h$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, උඩත් හා යටත් වෘත්තාකාර ගැටිවල අරයන් පිළිවෙළින් R හා $\frac{R}{2}$ වූ ද උස $2R$ වූ ද ඝන සෘජු වෘත්තාකාර කේතු ජින්නකයක හැඩයෙන් යුත් ඒකාකාර කොන්ක්‍රීට් කුට්ටියක් සහ අරය R වූ ඝන අර්ධ ගෝලයකින්, අරය R සහ උස R බැගින් වූ සෘජු වෘත්තාකාර ඝන කේතුක කොටසක් හාරා ඉවත් කිරීමෙන්, සෑදෙන අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක් ඒවායේ අක්ෂ සිරස්ව සහ සමපාත වන පරිදි දෘඩව සවිකිරීමෙන් මල් පෝච්චියක් සාදා ඇත. ජින්නකය හා අර්ධ ගෝලාකාර කබොල ඒකක පරිමාවක ස්කන්ධය σ වූ එකම ද්‍රව්‍යයෙන් නිමවා ඇත.

මල් පෝච්චියේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට O සිට දුර $\frac{7R}{6}$ බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි මල් පෝච්චියේ පහළ වෘත්තාකාර මුහුණත තිරසට α ආනත රළු තලයක උපරිම බෑවුම් රේඛාව ස්පර්ශ වන පරිදි තබා ඇත. දැන්, තලය සෙමෙන් උඩු අතට ඇල කරනු ලැබේ.

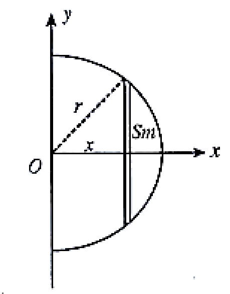
මල් පෝච්චිය සමතුලිතව පිහිටීමට නම් $\alpha < \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right)$ සහ $\mu \geq \tan\alpha$ විය යුතු බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු මල් පෝච්චිය හා ආනත තලය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.

<u>Uniform solid hemisphere</u>

By symmetry, the centre of mass lies on the x - axis. 5

$\delta m = \pi (r^2 - x^2)\, \delta x\, \sigma,$

where σ is the density



$$\bar{x} = \frac{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma x\, dx}{\int_0^r \pi (r^2 - x^2)\, \sigma\, dx} \quad 5 \quad 5$$

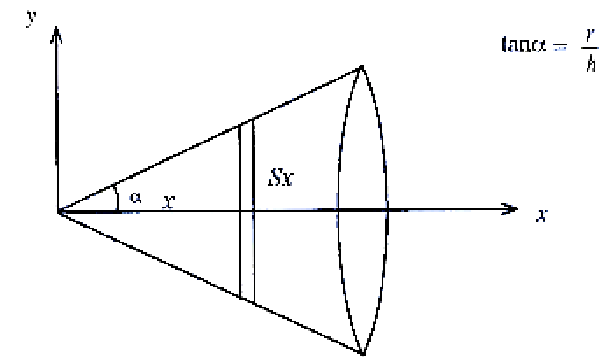
$$= \frac{\left(\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^r}{\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^r} \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4}}{r^3 - \frac{r^3}{3}}$$

$$= \frac{3r}{8} \quad 5$$

30

<u>Uniform solid right circular cone</u>



By symmetry, the centre of mass lies on the x - axis. 5

$\delta x = \pi (x \tan\alpha)^2\, \delta x\, \rho,$ where ρ is the density.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h \pi \tan^2\alpha\, \rho x^2 . x\, dx}{\int_0^h \pi \tan^2\alpha\, \rho x^2\, dx} \quad 5 \quad 5$$

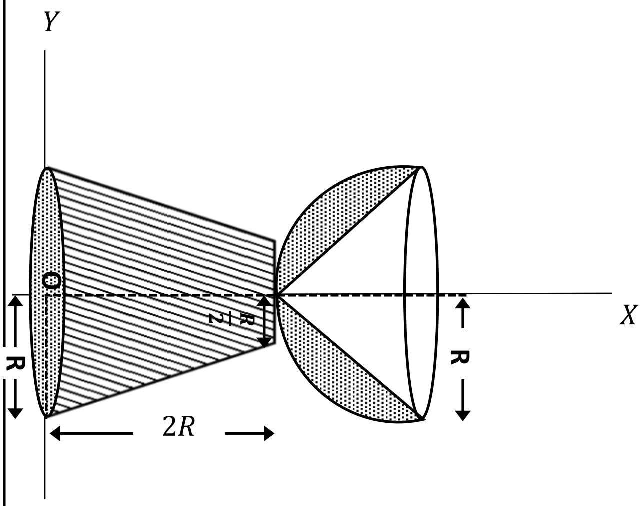
$$= \frac{\frac{x^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{x^3}{3}\Big|_0^h} \quad 5 \quad 5$$

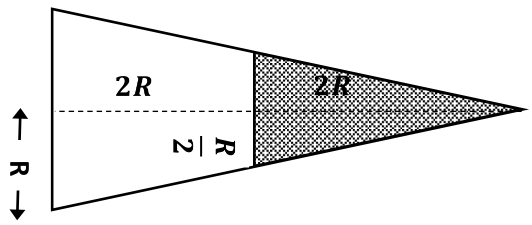
$$= \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}.$$

$\therefore$ The distance from the centre of the base $= h - \frac{3h}{4}$

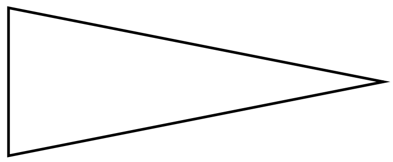
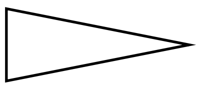
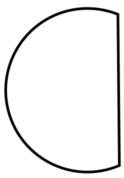
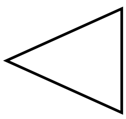
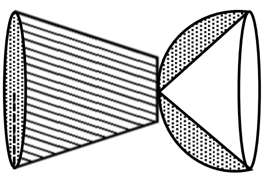
$$= \frac{h}{4} \quad 5$$

30





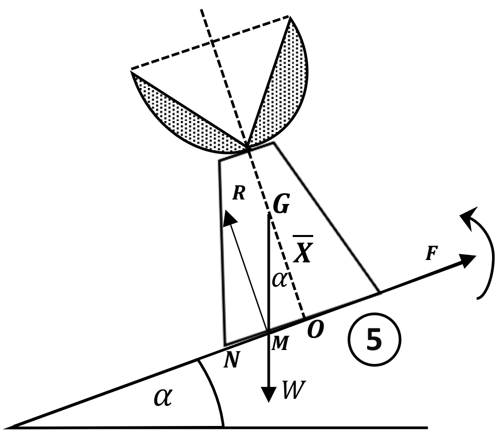
By symmetry, the center of mass lies on OX 5

Object	Mass $\left(\frac{1}{3}\pi R^3\rho = M\right)$	Distance from O
	$\frac{4}{3}\pi R^3\rho = 4M$ 5	R 5
	$\frac{1}{6}\pi R^3\rho = \frac{M}{2}$ 5	$\frac{5R}{2}$ 5
	$\frac{2}{3}\pi R^3\rho = 2M$ 5	$\frac{21R}{8}$ 5
	$\frac{1}{3}\pi R^3\rho = M$ 5	$\frac{11R}{4}$ 5
	$\frac{9}{2}\pi R^3\rho = \frac{9M}{2}$ 5	$\overline{X}$

$$\frac{9M}{2}.\overline{X} = (4M.R) - \left(\frac{M}{2}.\frac{5R}{2}\right) + \left(2M.\frac{21R}{8}\right) - \left(M.\frac{11R}{4}\right) \quad 10$$

$$\overline{X} = \frac{7R}{6} \quad 5$$

65



5

$F = w\ sin\alpha$

$R = w\ cos\alpha$ 5

To prevent sliding

$$\left|\frac{F}{R}\right| \leq \mu$$

$$\frac{w\ sin\alpha}{w\ cos\alpha} \leq \mu \dashrightarrow \mu \geq tan\alpha \quad 5$$

To prevent rolling

$$OM \leq ON \dashrightarrow \frac{OM}{OG} \leq \frac{ON}{OG} \quad 5$$

$$tan\alpha \leq \frac{R}{\left(\frac{7R}{6}\right)} \dashrightarrow tan\alpha \leq \frac{6}{7}$$

$$\therefore \alpha \leq \tan^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) \quad 5$$

25

17. (a) නිෂ්පාදන ආයතනයක ඇති A, B හා C ලෙස තත්වයෙන් ශ්‍රේණිගත කර ඇති පෙනුමෙන් සමාන විදුලි බුබුලු සහිත පෙට්ටි 1: 2: 2 අනුපාතයට ඇත. මෙම ශ්‍රේණි තුනෙහිම දෝෂ සහිත සහ දෝෂ රහිත ලෙස විදුලි බුබුලු වර්ග දෙකක් හමුවේ.

A, B හා C ශ්‍රේණිවල දෝෂ සහිත විදුලි බුබුලු හමුවීමේ සම්භාවිතා පිළිවෙළින් 0.00, 0.10, හා 0.20 වේ. අහඹු ලෙස තෝරාගත් පෙට්ටියකින් බල්බ දෙකක් අහඹු ලෙස තෝරා ගෙන පරීක්ෂා කරනු ලැබේ.

(i) තෝරා ගත් බල්බ දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) තවද පරීක්ෂාවට භාජනය කල විදුලි බුබුලු දෙකම දෝෂ රහිත විදුලි බුබුලු නම්, එය B ශ්‍රේණියේ පෙට්ටියකින් ගත් බල්බයක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

A: *The box chosen containing bulb of Grade A*
B: *The box chosen containing bulb of Grade B*
C: *The box chosen containing bulb of Grade C* 5

X: *The two bulbs tested are found to be satisfactory*

$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.4 \quad P(C) = 0.4$ 5

$P(X/A) = 1.0 \quad P(X/B) = (1.0 - 0.1)^2 = 0.81$

$P(X/C) = (1.0 - 0.2)^2 = 0.64$ 10

$P(X) = P(A).P(X/A) + P(A).P(X/\boldsymbol{A}) + \text{P(C)}.P(X/\boldsymbol{C})$ 10

$P(X) = 0.2 \times 1 + 0.4 \times 0.81 + 0.4 \times 0.64$ 5

$P(X) = 0.78$ 5

$$P(B/X) = \frac{P(X/B).P(B)}{P(X)} = \frac{0.81 \times 0.4}{0.78} \quad 10 \quad 5$$

$P(B/X) = 0.415$ 5

60

(b) එක්තරා පරීක්ෂණයකට පෙනී සිටි සිසුන් 70 දෙනෙකු ලබාගන්නා ලද ලකුණු වල සමූහිත සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක පන්ති ලකුණු සහ එක් එක් පන්ති ලකුණට අදාල සංඛ්‍යාත පහත වගුවේ දැක්වේ. සමත් වීමේ ලකුණ 35 වේ.

පන්ති ලකුණ	සංඛ්‍යාතය
35	05
45	10
55	15
65	30
75	05
85	05

$y_i = \frac{1}{10}(x_i - 55)$ යන පරිණාමනය භාවිතයෙන් මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාවය නිමානය කරන්න.
මෙම පරීක්ෂණයට පෙනී සිටි මුලු සිසුන් ගණන 100 ක් වන අතර මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය පිළිවෙළින් **48** හා **21.5** ලෙස දී ඇත. අසමත් සිසුන් 30 දෙනාගේ මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය නිමානය කරන්න.

---

x_i	f_i	$y_i = \left(\frac{x_i - 55}{10}\right)$	$f_i y_i$	$f_i {y_i}^2$
35	05	-2	-10	20
45	10	-1	-10	10
55	15	0	0	15 5
65	30	1	30	30
75	05	2	10	20
85	05	3	15	45
	70	5	**35** 5	**140** 5

$\overline{X} = 10\overline{Y} + 55$ 5

$\overline{Y} = \frac{\sum f_i y_i}{\sum f_i} = \frac{35}{70} = \frac{1}{2}$ 5

$\overline{X} = 10 \times \frac{1}{2} + 55 = 60$ 5

$\sigma_x^2 = c^2 \left[\frac{\sum f y^2}{\sum f} - \overline{y}^2\right]$ 5

$\sigma_x^2 = 10^2 \left[\frac{140}{70} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$ 5

$\sigma_x^2 = 10^2 \left[2 - \frac{1}{4}\right]$

$\sigma_x^2 = 13.2$ 5

$\boxed{50}$

$let\ \mu_2\ is\ the\ mean\ of\ the\ 30\ students$

$\mu =\ mean\ of\ the\ 100\ students$

$\mu = \frac{n\mu_{1+m\mu_2}}{n+m} \quad n = 70, m = 30$

$4.8 = \frac{70 \times 60 + 30 \times \mu_2}{100}$ 5

$\mu_2 = 20$ 5

$let\ \sigma\ is\ the\ standard\ deviation\ of\ the\ 100\ students$

$\sigma^2 = \frac{(n\sigma_1^2 + m\sigma_2^2) + (nd_1^2 + md_2^2)}{n+m}$ 5

$\sigma_1^2 = 175 \quad \sigma^2 = (21.5)^2 \quad \sigma_2^2\ ?$

$d_1 = 48 - 60 \qquad d_2 = 48 - 20$

$21.5^2 = \frac{(70 \times 175 + 30 \times \sigma_2^2) + (70 \times 144 + 30 \times 28^2)}{100}$ 10

$3\sigma_2^2 = 137.5$ 5

$\sigma_2^2 = 45.83$ 5

$\sigma_2 = 6.73$ 5

$\boxed{40}$